Mathematik I für Informatik
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Ulrik Buchholtz
Miriam Schmitt, Jonathan Weinberger

WiSe 2020/21

Übung: 9.–10. November, 2020
Abgabe bis: 14. November 2020, 18 Uhr

Liebe Studierende,

für einen guten Übungsbetrieb bitten wir Sie, das Folgende zu beachten:

- Bitte versehen Sie den Kopf eines jeden Hausaufgabenblatts mit Ihrem **vollständigen Namen**, der **Nummer Ihrer Übungsgruppe**, dem **Namen Ihrer Übungsgruppenleiter*in** und der **Nummer des bearbeiteten Übungsblatts**. Lassen Sie nach dem Kopf etwa 5 Zentimeter Platz.
- Sie können die Hausübungen in Kleingruppen von bis zu drei Personen abgeben. Damit alle lernen, mathematische Texte zu formulieren, müssen Sie sich beim Aufschreiben abwechseln. Bitte kennzeichnen Sie auf Ihrer Abgabe, wer welche Lösung aufgeschrieben hat.
- Wir bitten um eine leserliche und aussagekräftige Schreibweise. Jede Aufgabe sollte klar gekennzeichnet sein.
- Bitte reichen Sie Ihre Abgabe online auf Moodle in Form einer einzigen PDF-Datei (max. 20 MB) ein.
- **Wichtig:** Im Falle einer Gruppenabgabe tragen Sie die Ko-Autor*innen bei der Abgabe in Moodle entsprechend ein.
- Bitte bereiten Sie sich mit eigenen Notizen und dem Skript der Vorlesung auf die Übung vor, indem Sie die zentralen Begriffe wiederholen.
- Nach der Abgabe werden auf der Moodle-Seite der Veranstaltung Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben veröffentlicht. Beachten Sie bitte, dass es sich dabei nicht immer um vollständig ausgearbeitete Lösungen mit allen nötigen Details handelt. Wenn Sie etwas nicht verstehen, können Sie Ihre Übungsleiter*innen dazu fragen.
- **Wichtig:** Beachten Sie bitte die ausführlichen Informationen auf der Moodle-Seite der Veranstaltung.
- Denken Sie daran: „Übung macht den Meister“ und „Mathe macht Spaß“!

Viel Freude an der Mathematik!

Gruppenübung

Aufgabe G1.1 (Aussagenlogik)
Überzeugen Sie sich mit Hilfe von Wahrheitstafeln von den folgenden Zusammenhängen:

(a) Es gilt $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ und $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$.
Bemerkung: Diese Äquivalenzen sind bekannt als de Morgansche Gesetze.

(b) Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zur Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$.
Bemerkung: Die zweite Implikation heißt Kontraposition der ersten.

(c) Aus der Implikation $A \Rightarrow B$ folgt im Allgemeinen *nicht* die Implikation $B \Rightarrow A$.

Aufgabe G1.2 (Formalisierung und Negation)
Es sei W die Menge aller Wände in einem Haus. Wir betrachten die Aussageformen

$$F(x) : x \text{ hat ein Fenster,}$$
$$T(x) : x \text{ hat eine Tür.}$$

Was drücken die folgenden Aussagen in natürlicher (gesprochener) Sprache aus? Negieren Sie die Aussagen und drücken Sie die negierten Aussagen ebenfalls in natürlicher Sprache aus.

(a) $\forall x \in W : F(x)$,

(b) $\forall x \in W : (T(x) \Rightarrow (\neg F(x)))$,

(c) $(\forall x \in W : F(x)) \Rightarrow (\exists x \in W : F(x))$

Überlegen Sie: Aussage (c) ist genau dann wahr, wenn W nicht leer ist.

Aufgabe G1.3 (Veranschaulichung von Mengen mit Venn-Diagrammen)
Ist die folgende Beziehung zwischen Teilmengen A, B und C einer beliebigen Grundmenge richtig oder falsch? Veranschaulichen Sie die Situation mit Hilfe eines Venn-Diagramms (Mengen werden durch Kreise dargestellt. Der Bereich, welcher von zwei Kreisen begrenzt wird, veranschaulicht den Schnitt der beiden Mengen):

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cap C).$$

Beweisen Sie die Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel!

Aufgabe G1.4 (Relationen)
Geben Sie je mindestens ein Beispiel einer Relation R auf einer Menge M mit den nachstehenden Eigenschaften an:

(a) R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(b) R ist weder reflexiv, noch symmetrisch, noch transitiv.

(c) R ist weder reflexiv, noch transitiv, aber symmetrisch.

Hausübung

Bitte bearbeiten Sie zwei der folgenden drei Aufgaben. Falls Sie alle Aufgaben bearbeiten, so kennzeichnen Sie eindeutig, welche Aufgaben bewertet werden sollen (wenn Sie dies nicht kennzeichnen, dann werden Aufgaben H1 und H2 bewertet). Die übrige Aufgabe wird dann weder korrigiert noch bepunktet. Wie auf jedem Übungsblatt sind also 18 Punkte zu erreichen. Auch wenn nur zwei Aufgaben bewertet werden, so sind doch alle Aufgaben wichtig, um den Stoff der Vorlesung zu verstehen. Sie sollten sich also mit allen Aufgaben beschäftigen, oder zumindest im Nachhinein die im Moodle veröffentlichten Lösungshinweise zur dritten Aufgabe studieren.

Aufgabe H1.1 (Aussagen und Formalisierung) (9 Punkte)

(a) [3 Punkte] Handelt es sich bei den folgenden sprachlichen Gebilden um Aussagen? Falls ja, bestimmen Sie deren Wahrheitswert, soweit das möglich ist.

   (i) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.
   (ii) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$.
   (iii) Die Zahl 99 ist kleiner.
   (iv) Es gibt Leben auf anderen Planeten.
   (v) Zu Hilfe, zu Hilfe!
   (vi) $\exists y \in \mathbb{N} : x + y \leq 3$.

(b) [6 Punkte] Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren. Geben Sie außerdem die Negation der Aussagen an, und zwar sowohl mit Quantoren als auch in natürlicher Sprache.

   (i) Die Menge der ganzen Zahlen besitzt ein größtes Element.
   (ii) Jede natürliche Zahl ist gleich Null oder von der Form $n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H1.2 (Mengenoperationen) (9 Punkte)

(a) [6 Punkte] Wir betrachten die Intervalle $K := (2,7]$ und $L := [4,9)$ in den reellen Zahlen. Geben Sie die folgenden Mengen an (als Intervalle bzw. in der Form $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dots\}$). Zeichnen Sie die Mengen außerdem auf einem Zahlenstrahl (Teilaufgaben (i) und (ii)) bzw. in einem Koordinatensystem (Teilaufgabe (iii)).

   (i) $K \cap L$
   (ii) $K \setminus L$
   (iii) $K \times L$

(b) [3 Punkte] Wir betrachten die Menge $A = \{\{1\}, 2\}$ und ihre Potenzmenge $\mathscr{P}(A)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

   (i) $\{\{1\}\} \in \mathscr{P}(A)$
   (ii) $\{\{1\}\} \subseteq \mathscr{P}(A)$
   (iii) $\{\{2\}\} \in \mathscr{P}(A)$
   (iv) $\{\{2\}\} \subseteq \mathscr{P}(A)$
   (v) $\{\{1\}, 2\} \in \mathscr{P}(A)$
   (vi) $\{\{1\}, 2\} \subseteq \mathscr{P}(A)$

Aufgabe H1.3 (Äquivalenz- und Ordnungsrelationen) (9 Punkte)

(a) [6 Punkte] Bestimmen Sie, ob die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch bzw. transitiv sind. Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen? Welche sind Ordnungsrelationen?

   (i) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ ist gerade}\}$
   (ii) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2 \leq y\}$
   (iii) $R_3 = \{(A,B) \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq B\}$

(b) [3 Punkte] Wir betrachten zwei Ordnungsrelationen $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sowie deren Durchschnitt $R := R_1 \cap R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist R eine totale Ordnung, so gilt $R_1 = R_2$.
Tipp: Für $R = R_1 \cap R_2$ gilt nRm genau dann, wenn nR_1m und nR_2m gilt.